état initial : pas de courant dans L_k, pas de charges dans C_k

switch 2→1 : Le courant ne peut s'écouler tout de suite dans L_1 C10

Il charge d'abord C_1

Lorsque la ddp sur L_1 est suffisante, C_1 se décharge dans L_1

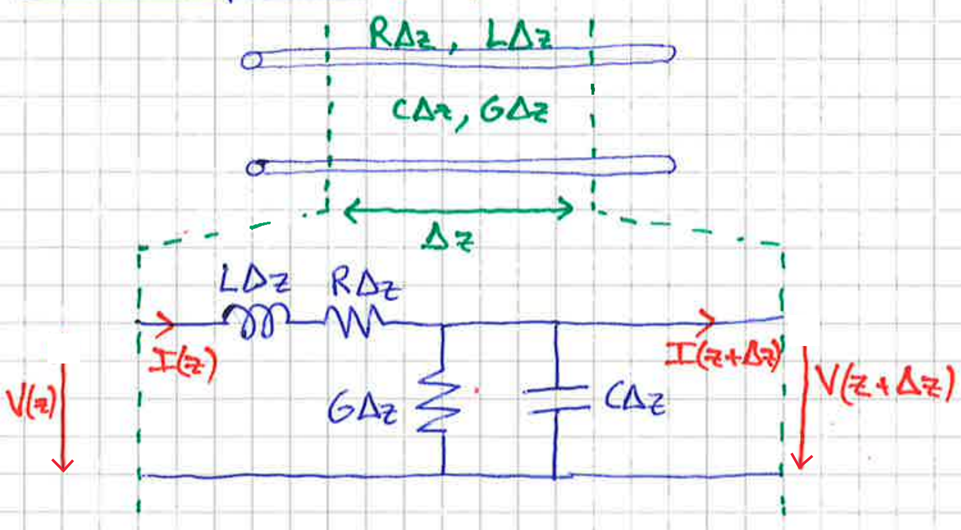
Le courant coule dans L_1 et charge C_2

etc

⇒ effets de retard ⇒ comportement ondulatoire.

b. Equations

* circuit équivalent (C11)



G, C, admittance

* équations des LT : (C12)

$$\mathcal{V}(z+\Delta z,t)-\mathcal{V}(z,t)=-R\Delta z\,\mathcal{I}(z,t)-L\,\Delta z\,\frac{\partial \mathcal{I}(z,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathcal{V}(z+\Delta z,t)-\mathcal{V}(z,t)}{\Delta z}=-R\,\mathcal{I}(z,t)-L\,\frac{\partial \mathcal{I}(z,t)}{\partial t}$$

$\Delta z \to 0$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial \mathcal{V}(z,t)}{\partial z}=-\left(R+L\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{I}(z,t)\qquad (1)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$I(z+\Delta z) - I(z,t) = -G\,\Delta z\,V(z+\Delta z,t) - C\,\Delta z\,\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{I(z+\Delta z) - I(z,t)}{\Delta z} = -G\,V(z+\Delta z,t) - C\,\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

$$\overset{\Delta z\to 0}{\Rightarrow} \quad \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -\left(G + C\frac{\partial}{\partial t}\right) V(z,t) \qquad (2)$$

* équation d'onde (C13) $\quad R = G = 0$

$$\frac{\partial(1)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\cancel{R}^{\,0}\frac{\partial I}{\partial z} - L\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial I}{\partial z} \overset{(2)}{=} -L\frac{\partial}{\partial t}\left\{-C\frac{\partial V}{\partial t}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial z^2}V = LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}V} \qquad (E)$$

* $v_p = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\quad f\left(\xi = t - \dfrac{z}{v_p}\right)$ est solution $\forall f$

demonstration

$$V(z,t) = f(t - z/v_p) = f(\xi)$$

$$* \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$* \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{v_p}\frac{\partial f}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{1/LC}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad [QED].$$

C14

Rq1 $\quad f\left(t - \dfrac{z}{v_p}\right) = f\Big(\underbrace{-\dfrac{1}{v_p}(z - v_p t)}_{g(z-\tau)}\Big)$ $\rightarrow$ se propage à droite avec la vitesse v_p

Rq2 : $f^-\left(t + \dfrac{z}{v_p}\right)$ est aussi solution $\rightarrow$ propagation vers la gauche

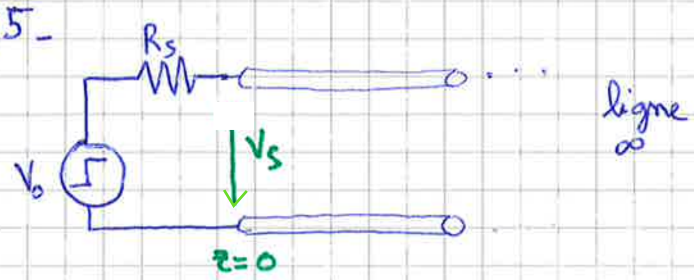
⇒ Solution générale : $\mathcal{V}(z,t) = f^+(t - z/v_p) + f^-(t + z/v_p)$

* courant associé (exercice) : $\mathcal{I}(z,t) = \frac{1}{Z_0}\left(f^+\left(t - \frac{z}{v_p}\right) - f^-\left(t + \frac{z}{v_p}\right)\right)$

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ impédance caractéristique

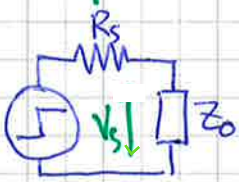
$Z_0 = \frac{\mathcal{V}(z,t)}{\mathcal{I}(z,t)}$ lorsqu'il n'y a pas d'onde réfléchie ($f^- = 0$, ligne ∞)

E5 -



Avant $t=0$, tension et courants dans la ligne sont nuls. A $t=0$, la source va envoyer une perturbation $\mathcal{V}^+(z,t)$ se propageant vers la droite. Cette tension est forcément accompagnée par un courant $\mathcal{I}^+(z,t) = \frac{1}{Z_0}\mathcal{V}^+(z,t)$.

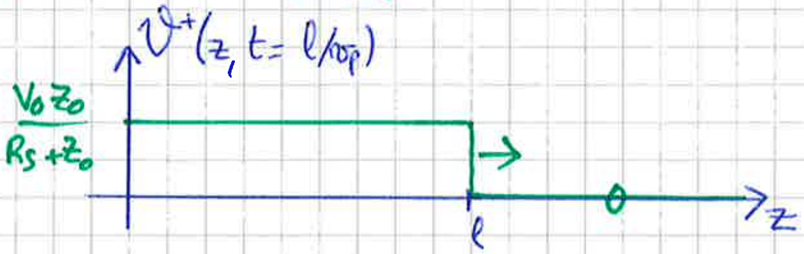
⇒ la ligne présente une impédance Z_0 en $z=0$ (et $\forall z > 0$)

⇒ schéma équivalent 

⇒ $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}^+(z=0, 0) = \frac{V_0 Z_0}{Z_0 + R_s}$

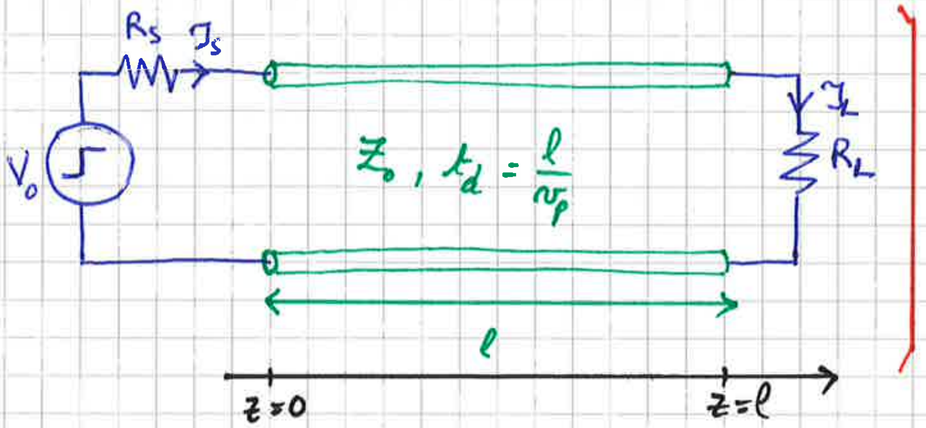
⇒ $\mathcal{I}_s = \frac{V_0}{Z_0 + R_s}$

→ cette perturbation se propage ensuite à la vitesse v_p vers la droite.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

c - Réflexion aux discontinuités



C15

① A $t=0$, la source voit une ligne infinie

$\Rightarrow$ $V_1^+(z,t)$ est lancé vers la droite $(t \leq t_d)$

Amplitude : $V_1^+(0,0) = \dfrac{Z_0 V_0}{R_S + Z_0}$

② En $z=\ell$ à $t=t_d$, la perturbation arrive sur la charge. On doit avoir :

$$V_L(t_d^+) = R_L \, I_L(t_d^+)$$

Mais comme $V_L(t_d^-) = Z_0 \, I_L(t_d^-)$, on ne peut satisfaire cette CL sans générer une onde réfléchie :

$$\begin{cases} V_L(t_d^+) = V_1^+(\ell, t_d^+) + V_1^-(\ell, t_d^+) \\ I_L(t_d^+) = \dfrac{1}{Z_0}\left[V_1^+(\ell, t_d^+) - V_1^-(\ell, t_d^+)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1^+ + V_1^- = R_L \cdot \frac{1}{Z_0}(V_1^+ - V_1^-) \Rightarrow 1 + \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{R_L}{Z_0}\left(1 - \frac{V_1^-}{V_1^+}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}} \equiv \Gamma_L$$

coefficient de réflexion de la charge

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Donc en $z = l$, $t = t_d^+$, $v_1^- = \Gamma_L v_1^+ = \Gamma_L \dfrac{Z_0 V_0}{R_S + Z_0}$ se crée et se propage vers la gauche.

③ En $t = 2t_d \rightarrow$ nouvelle réflexion côté source avec $\Gamma_S = \dfrac{R_S - Z_0}{R_S + Z_0}$
créant $v_2^+ = \Gamma_S v_1^- = \Gamma_S \Gamma_L v_1^+$

$\Rightarrow$ la tension totale vaut, en $z = 0$, à $t = 2t_d^+$

$$\begin{cases} v_S(t) = v_1^+ [1 + \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_S] \\ I_S(t) = \dfrac{1}{Z_0} v_1^+ [1 - \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_S] \end{cases}$$

* Rq 1 : Cas limites

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

Pour des charges résistives, $0 \leq R_L \leq +\infty$, $-1 \leq \Gamma_L \leq 1$

$R_L = 0$
circuit ~~ouvert~~ fermé

$R_L = +\infty$
circuit ~~fermé~~ ouvert

* Rq 2 : Impédance adaptée

Si $R_L = Z_0 \Rightarrow \Gamma_L = 0 \rightarrow$ pas de réflexion

EG - $v_S \rightarrow v_1^+ [1 + \Gamma_L + \Gamma_S \Gamma_L + \Gamma_S \Gamma_L^2 + \Gamma_S^2 \Gamma_L^2 + \ldots]$

$$\rightarrow v_1^+ [(1 + \Gamma_L \Gamma_S + (\Gamma_L \Gamma_S)^2 + \ldots) + (\Gamma_L (1 + \Gamma_S \Gamma_L + (\Gamma_S \Gamma_L)^2 + \ldots))]$$

$$\rightarrow v_1^+ \left(\frac{1}{1 - \Gamma_L \Gamma_S} + \frac{\Gamma_L}{1 - \Gamma_L \Gamma_S} \right) = v_1^+ \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_S \Gamma_L} \overset{*}{=} \frac{R_L Z_0}{R_S + R_L}$$

* cf détails page suivante

E6 (details du calcul) On utilise :

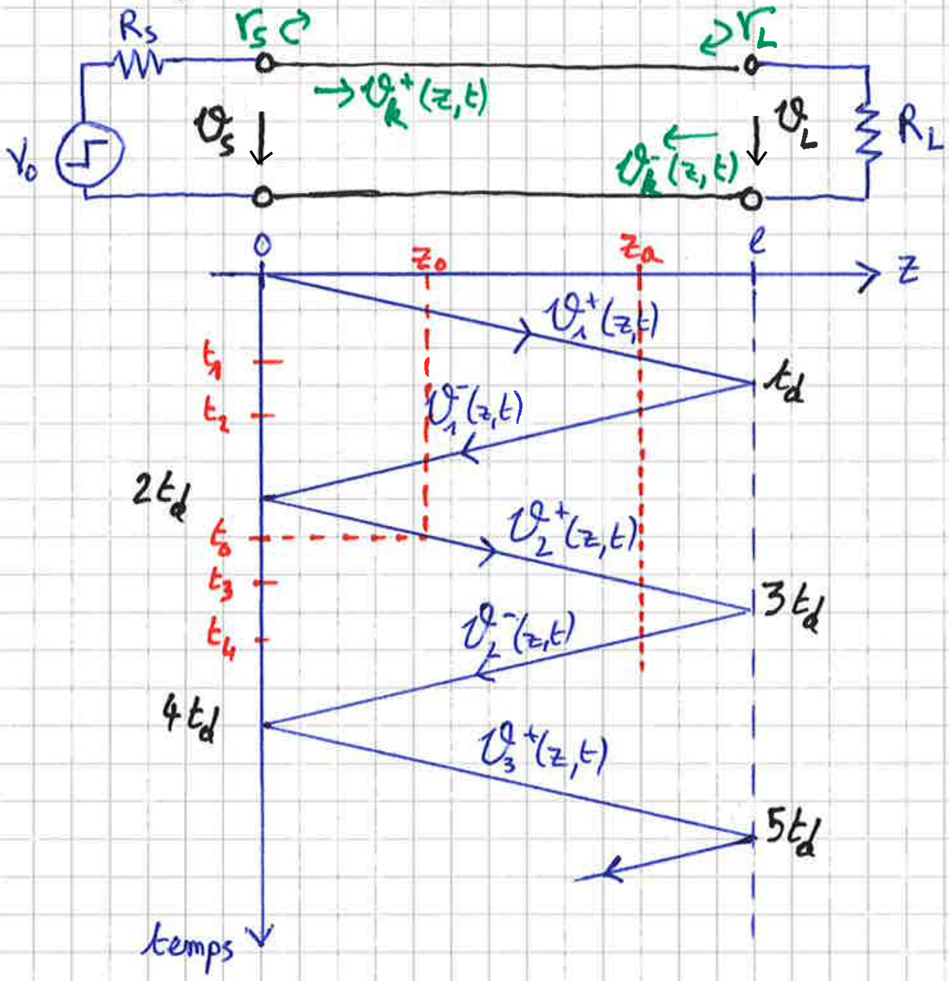
$$v_1^+ = \frac{Z_0 V_0}{R_S + Z_0} \qquad r_S = \frac{R_S - Z_0}{R_S + Z_0} \qquad r_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

$$\Rightarrow v_S \to \frac{Z_0 V_0}{\cancel{R_S + Z_0}} \; \frac{\cancel{(R_S + Z_0)}(R_L + Z_0) + (R_L - Z_0)\cancel{(R_S + Z_0)}}{(R_S + Z_0)(R_L + Z_0) - (R_S - Z_0)(R_L - Z_0)}$$

$$\Rightarrow v_S \to Z_0 V_0 \frac{\cancel{2} R_L}{\cancel{2}(R_S \cancel{Z_0} + R_L \cancel{Z_0})} = \frac{R_L}{R_S + R_L} Z_0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C16 - Diagramme des reflexions multiples



① Tension de ligne à t_0 ?

$$v(z,t_0) = \begin{cases} v_1^+(1+\Gamma_L+\Gamma_L\Gamma_S) & \text{si } z<z_0 \\ v_1^+(1+\Gamma_L) & \text{si } z \geq z_0 \end{cases}$$

Courant de ligne à t_0 ?

$$I(z,t_0) = \begin{cases} \frac{v_1^+}{Z_0}(1-\Gamma_L+\Gamma_L\Gamma_S) & z<z_0 \\ \frac{v_1^+}{Z_0}(1-\Gamma_L) & z \geq z_0 \end{cases}$$

② Tension à z_a en f^n de t ?

$$v(z_a,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<t_1 \\ v_1^+ & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ v_1^+(1+\Gamma_L) & \text{si } t_2 \leq t < t_3 \\ v_1^+(1+\Gamma_L+\Gamma_S\Gamma_L) & \text{si } t_3 \leq t < t_4 \end{cases}$$

NB : pentes $= \pm v_p^{-1}$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\Gamma_S = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$v_1^+ = \frac{Z_0 V_0}{R_S + Z_0}$$